Непрерывные функции

1. Найдите количество корней многочлена
$$\sum_{i=1}^{n}(x-1)(x-2)\ldots(x-i+1)(x-i-1)\ldots(x-n).$$

2. Пусть $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $f(0)=f(1)$. Докажите, что для произвольного натурального числа n существует такое действительное число $x\in[0,1-1/n]$, что $f(x)=f(x+1/n)$.

3. Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что при любом $a>1$ функция $f(x)+f(ax)$ непрерывна на всей числовой прямой. Докажите, что f также непрерывна.

4. Непрерывная функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ принимает значения разных знаков. Докажите, что найдётся арифметическая прогрессия $x_1<x_2<\ldots<x_{100}$ такая, что
$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{100})=0.$$

5. Может ли непрерывная функция принимать каждое действительное значение ровно **a)** 2; **b)** 3 раза?

6. На плоскости отмечены точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n и B_1, B_2, $\ldots$, B_n. Оказалось, что для любой точки P плоскости сумма расстояний от точки P до точек A_1, A_2, $\ldots$, A_n не равна сумме расстояний от точки P до точек B_1, B_2, $\ldots$, B_n. Докажите, что центры масс наборов точек A_1, A_2, $\ldots$, A_n и B_1, B_2, $\ldots$, B_n совпадают.

7. Дана непрерывная на окружности C функция f. Докажите, что найдётся пара диаметрально противоположных точек A и $B\in C$ таких, что $f(A)=f(B)$.

8. Дана непрерывная на сфере S функция f. Докажите, что найдётся такое значение y, которое f принимает на каждой большой окружности сферы S.

Функциональные уравнения

1. Найдите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(y)-f(x) \in \mathbb{Q}$, если и только если $y-x \in \mathbb{Q}$.

2. Найдите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(2x) - f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

3. Найдите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых x, $y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство
a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; **b)** $f(x+y) = f(x)f(y)$;
c) $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$.

4. Найдите все непрерывные функции $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ такие, что $f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in (-1,1)$.

5. Найдите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых x, $y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство
a) $f(x+y) + f(x-y) = 2\big(f(x) + f(y)\big)$;
b) $f^2(x)f^2(y) = f(x-y)f(x+y)$.

6. Существует ли непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство
a) $f\big(f(x)\big) = -x$; **b)** $f\big(f(x)\big) = \cos^2(x)$?

7. Непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого $x > 0$ выполнено равенство $f(x)f\big(f(x)\big) = 1$. Найдите $f(1000)$, если $f(2001) = 2000$.

8. Найдите все непрерывные функции $f\colon [0,1] \to [0,1]$ такие, что $f(0)=0, f(1)=1, f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = x, \forall x \in [0,1]$.

9. Дана непрерывная функция $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $f(2x^2-1) = 2xf(x)$ для любого $x \in [-1,1]$. Докажите, что функция f тождественно равна нулю.

10. Найдите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x+\sqrt{2}) \le f(x) \le f(x+1)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.